

## Partie 1

Soit  $g$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{2 \ln x}{x}.$$

1. On note  $g'$  la dérivée de  $g$ . Démontrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
Variations de $g$			$\frac{2}{e}$	
		$0$		$0$
		$-\infty$		

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

- la valeur  $\frac{2}{e}$ ;
  - les variations de la fonction  $g$  sur son ensemble de définition;
  - les limites de la fonction  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire le tableau de signes de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

## Partie 2

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

- Démontrer que sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , la fonction  $f$  est une primitive de la fonction  $g$ .
- À l'aide de la partie 1, étudier :
  - la convexité de la fonction  $f$ ;
  - les variations de la fonction  $f$ .
- Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse  $e$ .
  - En déduire que, pour tout réel  $x$  dans  $]0; e]$  :

$$[\ln(x)]^2 \geq \frac{2}{e}x - 1.$$